Leçon 201 : Espaces de fonctions ; exemples et applications.

Développements :

Lemme de Grothendieck, Théorème d'Ascoli.

Bibliographie :

Hirsch-Lacombre, Pommelet, Gourdon, Oraux X-ENS, Brezis, Briane-Pagès, Bernis, OA, ZQ, Rombaldi analyse réelle.

Rapport du jury 2017 :

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact (par exemple l'intervalle $[0, 1]$) offrent des exemples élémentaires et pertinents. Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces de fonctions continues et les bases de la convergence uniforme. Dans ce domaine, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Les espaces de Hilbert de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative. Pour aller plus loin, d'autres espaces usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon. Le théorème de Riesz-Fischer est alors un très bon développement pour autant que ses difficultés soient maîtrisées. Les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert de C constituent aussi une ouverture de très bon niveau ou, dans une autre direction, l'espace de Sobolev H^1.

Rapport du jury 2016 :

C'est une leçon riche où le candidat devra choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer. Les espaces de fonctions continues sur un compact (par exemple l'intervalle $[0, 1]$ offrent des exemples élémentaires et pertinents. Dans ce domaine, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces de fonctions continues et les bases de la convergence uniforme. Les espaces de Hilbert de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative. Pour aller plus loin, d'autres espaces usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon. Le théorème de Riesz-Fischer est alors un très bon développement pour autant que ses difficultés soient maîtrisées. Les espaces de fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$ constituent aussi une ouverture de très bon niveau.

Remarque 1. *Cadre : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (X, d) est un espace métrique.*

1 Espace des fonctions continues sur un compact

Remarque 2. *Soit (X, d) un espace métrique compact.*

1.1 Complétude

Définition 3 (Hirsch p24)**.** *$C(X, K)$.*

Remarque 4 (Hirsch p24)**.** *C'est une algèbre unitaire commutative*

Proposition 5. *Si $f \in C(X)$ alors f est bornée.*

Définition 6 (Hisch p24)**.** *Norme uniforme.*

Proposition 7. *(X, d) est séparable.*
Une limite uniforme de fonctions continues est continue.
L'espace $C(X, K)$ muni de la norme uniforme est un Banach.

Application 8. *Théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Contre exemple 9. *$C(K, E)$ muni de la norme L^1 ou de la norme L^2 est non complet.*

Proposition 10 (Hirsch)**.** *Suite de polynômes qui converge uniformément vers la racine carrée sur $[0, 1]$.*

Proposition 11. *Soit $f_n : X \to \mathbb{R}$ une suite croissante de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction continue. Alors la convergence est uniforme sur X.*

Exemple 12 (Pommelet)**.** *$(1 + x/n)^n 1_{[0,n]}$ converge uniformément vers e^{-x}.*

1.2 Parties denses

Remarque 13. *Aller plus vite avec Weierstrass.*

Définition 14. *Algèbre séparante.*

Théoreme 15 (Hirsch)**.** *[St Raymond p87] Théorème de Stone-Weierstrass (version réelle).*

Application 16. *L'ensemble des fonctions polynomiales à d variables de X sur $\mathbb{R}$ est dense. Dans le cas $d = 1$, cela correspond au théorème de Weierstrass.*

Remarque 17. *On connait même l'expression des polynomes : Berstein.*

Application 18. *Les fonctions lipschitziennes sont denses dans* $C([0,1],\mathbb{R})$.

Application 19 (Pommelet)**.** *Théorème des moments, injectivité de la transformée de Laplace.*

Contre exemple 20 (Gourdon)**.** *Faux sur* $\mathbb{R}$*, car une limite uniforme de polynômes sur* $\mathbb{R}$ *est un polynôme.*

Corollaire 21. *Si* X *est un compact, alors* $C(X,R)$ *est séparable (la famille des* x^n *forme une partie dense et dénombrable).*

Théoreme 22. *Théorème de Stone-Weierstass (version complexe).*

Application 23. *L'ensemble engendré par les* $(z!z^p)$ *est dense dans C(cercle unité,C).*

Corollaire 24. *Densité des polynômes trigonométriques.*

Remarque 25. *On connait en fait une expression exacte : noyau de Féjer.*

Proposition 26. *Les fonctions continues dérivable nulle part forment une partie dense de* $C([0,1],\mathbb{R})$.

Exemple 27 (Romb p78)**.** *Exemple d'une telle fonction.*

1.3 Parties compactes

Définition 28 (Hirsch p37)**.** *Définition d'équicontinuité et d'uniforme équicontinuité.*

Exemple 29 (Hirsch p38)**.** *L'ensemble des fonctions k-Lipschitziennes est une partie équicontinue. Fonctions* α*-holdérienne.*

Proposition 30. *Heine équicontinue et Heine uniformément équicontinue.*

Théoreme 31 (Hirsch p39)**.** *Théorème d'Ascoli.*

Contre exemple 32. $f \in C_c(\mathbb{R})$ *et* $f_n(x) = f(x+n)$.

Application 33. *Montel.*

Application 34 (ZQ p359)**.** *Théorème de Cauchy Peano.*

Contre exemple 35. $E = [0,+\infty[$ *(non compact) et* $F = \mathbb{R}$, $f_n(t) = sin(\sqrt{t+4n^2\pi^2})$

Application 36. *Soit* $K \in C([0,1]^2,\mathbb{R})$*, soit* $E = C([0,1],\mathbb{R})$*, soit* $T : E \to E$ *défini par* $T(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$*. Alors* $T(B_E(0,1))$ *est relativement compacte.*

Application 37 (Bernis)**.** *Une partie fermée de* $C^0([0,1])$ *incluse dans* C^1 *est de dimension finie.*

2 Espace des applications linéaires continues

Proposition 38 (Gourdon p48)**.** *Conditions équivalentes à la continuité. On note* $L(E,F)$.

Proposition 39 (Gourdon p48)**.** *Norme sur* $L(E,F)$.

Proposition 40 (Gourdon p48)**.** $L(E,F)$ *est une algèbre normée.*

Proposition 41 (Gourdon p48)**.** *Si* F *est un Banach alors* $L(E,F)$ *est un Banach.*

Proposition 42 (Gourdon p49)**.** *En dimension finie, toute application linéaire est continue.*

Théoreme 43 (Brezis p16)**.** *Théorème de Banach-Steinhaus.*

Application 44 (Gourdon p405)**.** *Existence de fonctions continues différentes de leur série de Fourier.*

3 Espaces L^p

3.1 Structure

Remarque 45. *On se place dans* (X,A,μ) *un espace mesuré.*

Définition 46 (Briane Pagès p153)**.** $\mathcal{L}^p$*, norme p.*

Définition 47 (Brézis p56)**.** $\mathcal{L}^\infty = \{f : X \to K, \exists M > 0 f \leq M\mu pp\}$*. Norme* ∞.

Exemple 48 (Briane P p153)**.** *Pour* $X = \mathbb{N}$, $A = P(\mathbb{N})$ *et* μ *la mesure de comptage,* $l^p(\mathbb{N}) := L^p(\mathbb{N})$ *est l'ensemble des suites* $(x_n)_n$ *telles que* $\sum |x_n|^p > +\infty$ *et* $l^\infty(\mathbb{N}) := L^\infty(\mathbb{N})$ *est l'ensemble des suites bornées.*

Proposition 49. *Inégalité de Holder.*

Proposition 50 (Briane p158)**.** *Inégalité de Minkowski.*

Proposition 51 (Briane p161)**.** *Pour* $f \in L_p(X)$, $||f||_p$ *est bien définie, et est une norme.*

Théoreme 52 (Briane p162)**.** *[Brézis p58] Théorème de Riesz-Fischer. Complétude et pour toute suite* $(f_n)_n$ *de* $L^p(X)$ *on peut extraire une suite pour laquelle tout choix de représentants dans* $\mathcal{L}^p$ *converge presque partout.*

Proposition 53 (Briane p154,p173)**.** *Si* $p \leq q$, $L^q \subset L^p$ *et* $lim||f||_p = ||f||_\infty \in [0,+\infty]$.

Contre exemple 54 (Briane p154)**.** *Contre exemple sur* $\mathbb{R}$ *: pas d'inclusion entre* L^1 *et* L^2.

Proposition 55. *Si $f \in L^p$ et $f \in L^q$ pour $1 \leq q \leq p$, alors $f \in L^r$ $\forall q \leq r \leq p$*

Proposition 56 (Briane p154)**.** $0 < p \leq q$, $l^p(\mathbb{N}) \subset l^q(\mathbb{N})$.

Proposition 57. *Si la mesure est finie, pour tous $q \leq p$, on a $||.||_q \leq \mu(X)^{(p-q)/pq}||.||_p$. Donc une convergence dans L^p implique une convergence dans L^q.*

Contre exemple 58 (Briane p164)**.** *Exemple d'une suite qui converge dans L^p mais pas μ-pp. Pour L^∞, $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$, converge vers 1 en norme infinie et vers 0 pp.*

Remarque 59. *Le théorème de Riesz-Fischer donne cependant la convergence presque partout d'une suite extraite.*

Théoreme 60 (Briane p165)**.** *Convergence dominée dans L^p.*

Contre exemple 61. *$f_n = n1_{[0,1/n]}$ converge pp vers 0 mais ne converge pas en norme p vers 0.*

3.2 Parties denses

Remarque 62. *Si une propriété reste vraie par passage à la limite en norme L^p, il suffit alors simplement de la vérifier sur des fonctions continues à support compact, voire plus régulières que cela.*

Proposition 63 (Briane p166)**.** *Densité des fonctions étagées intégrables dans L^p.*

Densité des fonctions étagées dans L^∞.

Densité des fonctions continues à support compact dans L^p.

Application 64 (Briane p188)**.** *Inégalité de Hardy.*

Application 65. *L'opérateur de translation est continu dans tous les L^p.*

Application 66. *L^p est séparable. L^∞ n'est pas séparable.*

Définition 67 (OA p119)**.** *Approximation de l'unité.*

Exemple 68 (OA p119)**.** *[Briane Pagès p284] Exemple de construction.*

Proposition 69 (OA p119)**.** *Théorème d'approximation.*

Proposition 70. *Pour $(f_n)_n$ approximation de l'unité et $g \in L^1$, $f_n * g \to g$ dans L^1.*

Si $f_n \in L^q$, cela est aussi vrai pour $g \in L_p$ avec $p = q/(q-1)$.

Application 71 (OA p121)**.** *Densité des fonctions C_c^∞ dans L^p.*

Application 72. *Théorème de Féjer.*

3.3 Le Hilbert L^2

Proposition 73 (Briane p177)**.** *L^2 est un Hilbert pour le produit scalaire...*

Proposition 74. *Théorème de projection sur un convexe fermé.*

Théoreme 75 (Briane p178)**.** *Théorème de Riesz. Plus facile à montrer que dans le cadre général.*

Exemple 76. *Problème des moindres carrés.*

Remarque 77. *Les propriétés d'espace de Hilbert (orthogonalité, projection sur un convexe fermé, supplémentaire orthogonal, famille orthogonale, convergence faible) permettent de faciliter la démonstration de problèmes portant sur les L^p.*

Application 78. *Théorème de Grothendieck.*

Proposition 79. *Théorème de Fourier-Plancherel.*

Proposition 80. *Densité des polynômes orthogonaux qui donne des bases hilbertiennes des L^2 à poids.*

Proposition 81. *Egalité de Parseval.*

4 Espace des fonctions holomorphes

Définition 82. *Convergence sur tout compact pour une suite de fonctions holomorphes.*

Exemple 83. *$f_n(x) = \sum z^k/k!$ converge uniformément sur tout compact vers l'exponentielle.*

Proposition 84 (Pabion p132)**.** *Si une suite de fonctions holomorphes convergent uniformément sur tout compact alors la limite est holomorphe*

Si (f_n) converge uniformément sur tout compact vers f alors la suite des dérivées aussi vers f'.

Proposition 85. *La topologie est métrisable. L'espace muni de cette distance est alors complet.*

Proposition 86 (Zuily Queffelec)**.** *[Saint Raymond p321][Bernis] Théorème de Montel*

Application 87 (Bernis)**.** *Il n'existe pas de norme sur $H(\Omega)$ qui définisse la même topologie que la distance.*